6. Euler és Hamilton

* **Séta:** olyan élsorozat, aminek minden éle különböző.
* **Körséta:** olyan séta, aminek a kezdő és a végpontja azonos.
* **Út:** Olyan séta, aminek minden csúcsa különböző
* **Kör:** Olyan út, aminek a kezdő és a végpontja ugyanaz

Gráfok éleinek bejárása

**Euler séta (Euler út):** Olyan séta a gráfban, amely G minden élét pontosan 1x tartalmazza. (pontot lehet többször is érinteni, szokták Euler útnak is hívni, de attól ez még nem út, mivel az út definíciója szerint nem tartalmazhatja többször ugyanazt a csúcsot.)

**Euler körséta (Euler kör):** Olyan körséta a gráfban, amely G minden élét pontosan 1x tartalmazza. (pontot lehet többször is érinteni, szokták Euler körnek is hívni, de attól ez még nem kör, mivel a kör definíciója szerint nem tartalmazhatja többször ugyanazt a csúcsot.)

Minden Euler körséta egyben Euler séta is.

**Létezésének szükséges és elégséges feltétele:**

* **Euler séta**: G gráfban létezik Euler séta, ha G-nek 0 vagy 2 db páratlan fokú csúcsa van.
  + Bizonyítás:
* **Euler-körséta**: G gráfban létezik Euler-körséta, ha G minden csúcsa páros fokú és összefüggő.
  + Bizonyítás:

Gráfok csúcsainak bejárása

**Hamilton kör:** A G gráf olyan köre, amely G minden csúcsát tartalmazza.

**Hamilton út:** A G gráf olyan útja, amely G minden csúcsát tartalmazza.

Itt a kör és az út ténylegesen a gráfelméleti utat és kört jelenti, mert itt a csúcsokat járjuk be, és mindegyiket csak 1x érinthetünk, kivéve a körnél a kezdő és a végpontnál.

**Létezésének szükséges feltétele** (csak cáfolatra alkalmas)

* Hamilton kör: Ha a véges G gráfban létezik Hamilton kör, akkor G-nek k tetszőleges pontját törölve, a keletkező gráfnak legfeljebb k komponense van.
* Hamilton út: Ha a véges G gráfban létezik Hamilton út, akkor G-nek k tetszőleges pontját törölve, a keletkező gráfnak legfeljebb k+1 komponense van.
  + bizonyítás: ha G gráf maga egy Hamilton-kör/út, akkor triviális. Ha további élei is vannak, akkor pedig csak csökkenhet a komponensek száma.
* Ezek szükséges, de nem elégséges feltételek, tagadni lehet vele a Hamilton út/kör létezését, de attól, hogy ezek igazak egy gráfra még nem biztos, hogy van bennük Hamilton kör/út. Pl: Petersen-gráf.

**Létezésének elégséges feltétele**

* Dirac: ha 𝑛 ≥ 3 pontú, egyszerű G gráf minden csúcsának fokszáma legalább , akkor G-nek van Hamilton-köre.
  + bizonyítás:
* Ore: ha az n csúcsú𝑛( ≥ 3), G egyszerű gráf olyan, hogy uv nem E(G) esetén 𝑑(𝑢) + 𝑑(𝑣) ≥ 𝑛, (azaz összekötetlen csúcsok fokszámösszege legalább n),akkor G-nek van Hamilton-köre.
  + bizonyítás:
* A Dirac tétel következik a Ore tételből.